

MATEMÁTICA - TESTES

01. E	02. C	03. E	04. C	05. D
06. D	07. B	08. C	09. A	10. E
11. B	12. A	13. D	14. C	15. A
16. B	17. A	18. D	19. E	20. B

Em breve estaremos disponibilizando as soluções de 1 a 20. Seguem as soluções de 21 a 30.

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

QUESTÃO 21

Sejam A , B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.

- a) Determine $n(C)$.
- b) Determine $n(P(B \setminus C))$

Resolução 21

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - 22$$

Como $C \subset B$, $n(B \cap C) = n(C)$

Dado: $n(B \setminus C) = 3 \cdot n(B \cap C) = 6 \cdot n(A \cap B)$

$$n(B) - n(C) = 3 \cdot n(C) = 6 \cdot [n(A) + n(B) - 22] \dots I$$

Sendo $(n(C), n(A), n(B))$ uma P.G. de razão $r > 0$,

$$n(B) = n(A) \cdot r = n(C) \cdot r^2 \text{ e } n(A) = n(C) \cdot r \text{ substituir em I}$$

$$n(C) \cdot r^2 - n(C) = 3 \cdot n(C) = 6 \cdot [n(C) \cdot r + n(C) \cdot r^2 - 22]$$

$$n(C) \cdot [r^2 - 1] = 3 \cdot n(C), \text{ como } n(C) \neq 0 \text{ e } r > 0,$$

$$r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

Segunda parte: $3 \cdot n(C) = 6 \cdot [n(C) \cdot 2 + n(C) \cdot 2^2 - 22]$

$$3 \cdot n(C) = 36n(C) - 132$$

$$33n(C) = 132 \Leftrightarrow n(C) = 4$$

b) De a) $n(B) = n(C) \cdot r^2 = 4 \cdot 2^2 = 16$

$$n(P(B \setminus C)) = 2^{n(B \setminus C)} = 2^{n(B) - n(C)} = 2^{16 - 4}$$

$$n(P(B \setminus C)) = 2^{16 - 4} = 2^{12}$$

$$n(P(B \setminus C)) = 4096$$

QUESTÃO 22

A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \dots, a_{5n+1}, \dots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \dots, a_{5n}, \dots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Resolução 22

$$\begin{cases} a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} + \dots = 8 \quad \dots I \\ a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + \dots = 2 \end{cases} \text{ multiplica-se I por } r^4$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot r^4 + a_6 \cdot r^4 + a_{11} \cdot r^4 + a_{16} \cdot r^4 + \dots = 8r^4 \\ a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + \dots = 2 \end{cases}$$

Logo, as duas equações são iguais,

$$8r^4 = 2 \Leftrightarrow r^4 = \frac{1}{4} \text{ com } r < 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$PG(a_1; a_6; a_{11}; \dots) \begin{cases} a_1 \\ q = r^5 = -\frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{a_1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{8}} = 8$$

$$a_1 = 8 \cdot \left(\frac{8 + \sqrt{2}}{8} \right) \Rightarrow a_1 = 8 + \sqrt{2}$$

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{a - r} = \frac{8 + \sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 14 - 6\sqrt{2}$$

$$S_\infty = \frac{16 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 14 - 6\sqrt{2}$$

QUESTÃO 23

Analise se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa f^{-1} .

Resolução 23

Seja $f(a) = \frac{3^a - 3^{-a}}{2}$ e $f(b) = \frac{3^b - 3^{-b}}{2}$

Se $f(a) = f(b)$, temos:

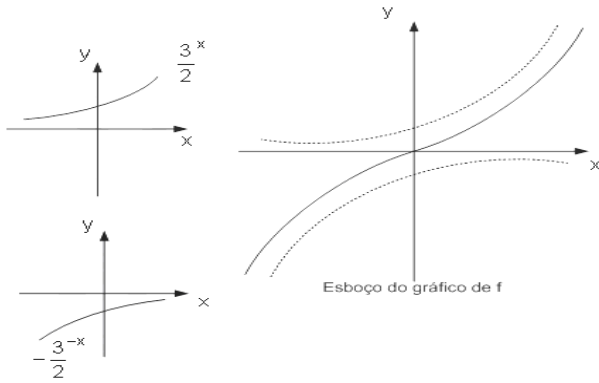
$$\frac{3^a - 3^{-a}}{2} = \frac{3^b - 3^{-b}}{2} \Leftrightarrow 3^a - \frac{1}{3^a} = 3^b - \frac{1}{3^b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^a - 3^b = \frac{1}{3^a} - \frac{1}{3^b} \Leftrightarrow 3^a - 3^b = \frac{3^b - 3^a}{3^a \cdot 3^b}$$

$$\Leftrightarrow (3^a - 3^b) \cdot 3^a \cdot 3^b = -(3^a - 3^b) \Leftrightarrow (3^a - 3^b) \cdot (3^a \cdot 3^b + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^a = 3^b \Rightarrow a = b \text{ ou } 3^{a+b} = -1 \text{ (impossível)}$$

Portanto, se $f(a) = f(b)$, devemos ter $a = b$, e portanto a função é injetora.



Portanto, a Imagem de $f(x)$ são os reais, e a função é sobrejetora.

Se f é injetora e sobrejetora, f é bijetora.

$$y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = 3^x - 3^{-x} \Rightarrow 2y = 3^x - \frac{1}{3^x}$$

$$2y \cdot 3^x = (3^x)^2 - 1 \Rightarrow (3^x)^2 - 2y \cdot (3^x) - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4y^2 + 4$$

$$3^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}$$

$3^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \rightarrow$ a partir deste ponto, seguiremos com a solução que é sempre positiva. Aplique log na base 3:

$$\log_3 3^x = \log_3 (y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\Leftrightarrow x = \log_3 (y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \log_3 (y + \sqrt{y^2 + 1})}$$

QUESTÃO 24

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é ímpar.

Resolução 24

Se $f(x)$ é bijetora, então existe $f^{-1}(x)$.

Se $f(x)$ é ímpar, então: $f(-x) = -f(x)$.

Sendo $f(x) = y$ então $f^{-1}(y) = f(x)$, por ser bijetora e

$f(-x) = -y$ então $f^{-1}(-y) = f(-x)$, bijetora.

Portanto:

$$f^{-1}(-y) = f(-x) = -f(x) = -f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y) \Rightarrow \boxed{f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)}$$

Ou seja, $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é ímpar.

QUESTÃO 25

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^6 a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p , $-r$ também é raiz de p . Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

- I. Se r_1 e r_2 , $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p , então r_3 é imaginário puro.
- II. Se r é raiz dupla de p , então r é real ou imaginário puro.
- III. $a_0 < 0$

Resolução 25

I. Verdadeira.

r_1 é raiz de $p \Rightarrow -r_1$ também é.

r_2 é raiz de $p \Rightarrow -r_2$ também é.

r_3 é raiz de p e imaginário puro, $r_3 = b \cdot i \Rightarrow \bar{r}_3 = -b \cdot i$ é raiz.

Como os coeficientes são reais, então se $z = a + b \cdot i$ for raiz de p , então $\bar{z} = a - b \cdot i$ também será raiz de p .

Caso $r_3 = a + b \cdot i \Rightarrow -r_3 = -a - b \cdot i$ seria raiz, mas então $\bar{r}_3 = a - b \cdot i$ e $-\bar{r}_3 = -a + b \cdot i$ também seriam raízes, o que seria um Absurdo, pois teríamos 8 raízes; portanto, r_3 é imaginário puro.

II. Verdadeira.

Se r é dupla, então $-r$ também será.

Se r for imaginário, então \bar{r} também será e $-r$ também e $-r$, portanto teríamos 8 raízes e isto não é possível. Portanto, se r é dupla, então r é real ou imaginário puro.

III. Falsa.

Usando a relação de Girard:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = -\frac{a_0}{a_6} = \frac{-a_0}{1} = -a_0.$$

Sabemos que $x_2 = -x_1$, $x_4 = -x_3$ e $x_6 = -x_5$.

$$\therefore x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 < 0 \Rightarrow -a_0 < 0 \Rightarrow \boxed{a_0 > 0}$$

QUESTÃO 26

Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

- a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.
- b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser múltiplo de 6.

Resolução 26

a)

$$M(5) = \{5, 10, 15, \dots, 90\} \Rightarrow n(M(5)) = 18$$

$$M(6) = \{6, 12, 18, \dots, 90\} \Rightarrow n(M(6)) = 15$$

$$M(5 \text{ e } 6) = M(30) = \{30, 60, 90\}$$

$$p(5 \text{ ou } 6) = \frac{18+15-3}{90} = \frac{30}{90} \Rightarrow p(5 \text{ ou } 6) = \frac{1}{3}$$

b) nº de bolas sendo múltiplo de 6 = 15 e não sendo múltiplo de 6 = 75.

Temos duas hipóteses, na 1ª hipótese a 1ª bola retirada não é múltiplo de 6 nem a 2ª bola, ou na 2ª hipótese a 1ª bola retirada é múltiplo de 6 e a 2ª não o é;

$$\text{Logo, } p(b) = \frac{75}{90} \cdot \frac{74}{89} + \frac{15}{90} \cdot \frac{75}{89} = \frac{75}{90} \left(\frac{74+15}{89} \right) = \frac{5}{6}$$

$$p(b) = \frac{5}{6}$$

QUESTÃO 27

Considere as matrizes $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação matricial $AX = B$ tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1 \ 1 \ 2 \ 4]^t$, encontre X tal que $AX = B$.

Resolução 27

a) $A \cdot X = B$, resulta no seguinte sistema linear:

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot x + 1 \cdot y + b \cdot z + 1 \cdot w = b_1 \\ b \cdot x + 1 \cdot y + a \cdot z + 0 \cdot w = b_2 \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot w = b_3 \\ -a \cdot x + 2 \cdot y + b \cdot z + 1 \cdot w = b_4 \end{cases}$$

que terá solução única somente quando $\det A \neq 0$.

Aplicado o teorema de La Place para cálculo de determinantes, escolhendo a 3ª linha.

$$\Rightarrow \det A = 0 + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ -a & b & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$\text{Sendo, } \det A \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ -a & b & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 0 + b^2 + a^2 - 0 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot a^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a \neq 0 \Leftrightarrow S = \{a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b \in \mathbb{R}\}$$

b) $a^2 - b^2 = 0$ teremos dois casos $a = b$ ou $a = -b$, $a \neq 0$, o sistema fica:

$$\begin{cases} a \cdot x + y + b \cdot z + w = 1 \\ b \cdot x + y + a \cdot z = 1 \\ 2 \cdot y = 2 \\ -a \cdot x + 2 \cdot y + b \cdot z + w = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot x + b \cdot z + w = 0 \dots I \\ b \cdot x + a \cdot z = 0 \dots II \\ -a \cdot x + b \cdot z + w = 2 \dots III \end{cases}$$

$$I - III: 2 \cdot a \cdot x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{a}$$

$$II: z = \frac{-b \cdot x}{a} = \frac{-b \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)}{a} \Rightarrow z = \frac{b}{a^2}$$

$$I \Rightarrow w = -a \cdot x - b \cdot z = -a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) - b \cdot \left(\frac{b}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow w = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{Assim, para } a = b, \text{ então } X = \left[-\frac{1}{a} \quad 1 \quad \frac{1}{a} \quad 0 \right]^t$$

$$\text{Para } a = -b, \text{ então } X = \left[-\frac{1}{a} \quad 1 \quad -\frac{1}{a} \quad 0 \right]^t \quad a \in \mathbb{R}^*$$

QUESTÃO 28

Considere a equação,

$$(3 - 2 \cos^2 x) \left(1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2} \right) - 6 \text{tg} \frac{x}{2} = 0.$$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi[$.

b) Para as soluções encontradas em a), determine $\cot g x$.

Resolução 28

Separando a subtração e dividindo por $1 + \text{tg}^2(x/2)$

$$\Rightarrow (3 - 2 \cos^2 x) = \frac{6 \text{tg} \frac{x}{2}}{\left(1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2} \right)} = 3 \cdot \frac{2 \text{tg} \frac{x}{2}}{\left(1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2} \right)}$$

Mas, temos que

$$\text{sen } x = 2 \cdot \frac{\text{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2} = \frac{2 \cdot \text{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \sec^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \text{tg} \frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\text{Logo: } (3 - 2 \cos^2 x) = 3 \text{sen } x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \text{sen}^2 x = 3 \text{sen } x \Leftrightarrow 2 \text{sen}^2 x - 3 \text{sen } x + 1 = 0$$

Resolvendo a equação no intervalo $[0, \pi[$:

$$\begin{cases} \text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Portanto a solução fica: $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

b) Calculando a cotangente para cada uma das soluções obtidas no item (a), chega-se a:

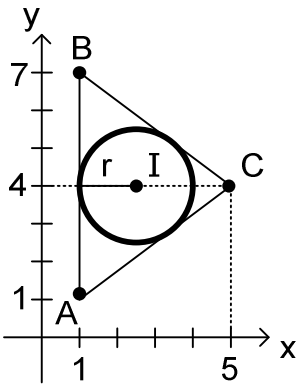
$$\cot g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cot g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \text{ e } \cot g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

QUESTÃO 29

Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são $A=(1,1)$, $B=(1,7)$ e $C=(5,4)$ no plano xOy .

Resolução 29

Vamos construir um gráfico com os dados



Calculando as distâncias entre os pontos:

$$a = BC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$b = AC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$$

$$c = AB = 6$$

Usando teorema de Hierão, com

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+5+6}{2} = 8$$

$$A_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow A_{\Delta} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 12$$

$$A_{\Delta} = p \cdot r \Leftrightarrow 8 \cdot r = 12 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

que é o valor do raio da circunferência inscrita.

O ΔABC é isósceles com base AB , I é o Incentro

I está na mediatriz de AB , logo

$$y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+7}{2} \Rightarrow y_1 = 4$$

$$x_1 = x_A + r = 1 + \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$$

Uma equação desta circunferência fica:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4}$$

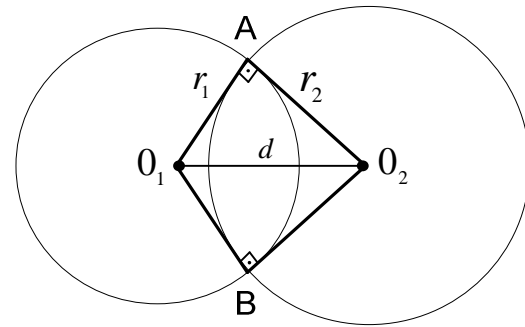
QUESTÃO 30

As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e

$\frac{3}{2}\text{ cm}$, respectivamente, calcule

- a) a distância entre os centros das duas esferas.
- b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

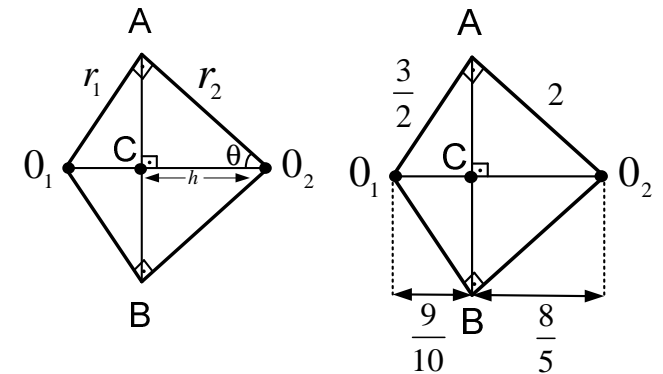
Resolução 30



a) No $\Delta O_1 A O_2$, temos: $d^2 = r_1^2 + r_2^2$.

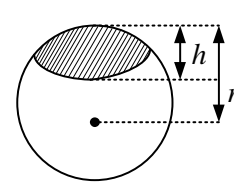
$$\Rightarrow d^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (2)^2 \Rightarrow d = \frac{5}{2}\text{ cm}$$

b)



No $\Delta O_1 A O_2$, temos: $\cos \theta = \frac{r_2}{d} = \frac{4}{5}$.

No $\Delta A C O_2$, temos: $\cos \theta = \frac{h}{2} \Rightarrow h = \frac{8}{5}\text{ cm}$.



Para um circunferência, temos:
 Área da região circular = $4\pi r^2$
 Área da calota = $2\pi r \cdot h$

Para a circunferência 1, temos:

$$A_{\text{calota}1} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{10}\right) \Rightarrow A_{\text{calota}1} = \frac{9\pi}{5}\text{ cm}^2$$

Para a circunferência 2, temos:

$$A_{\text{calota}2} = 2\pi \cdot 2 \left(2 - \frac{8}{5}\right) \Rightarrow A_{\text{calota}2} = \frac{8\pi}{5}\text{ cm}^2$$

A área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas é dada pela soma das áreas das calotas esféricas delimitadas pela intersecção das duas esferas.

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{calota}1} + A_{\text{calota}2} \Leftrightarrow A_{\text{TOTAL}} = \frac{9\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \frac{17\pi}{5}$$