MATEMÁTICA

QUESTÃO 1

Considere as matrizes A= $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P uma matriz inversível tal que B = $P^{-1}AP$. Sendo n um número natural, calcule o determinante da matriz A^n.

Resolução

Primeira solução:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{vmatrix} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \det A^n = (\det A)^n,$$

logo $\boxed{\det A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}}$

Infelizmente esta questão teve enunciado excessivo para a pergunta simples, cremos que houve falha na digitação da questão. Porém da forma como ela está sendo pedida, esta é a resolução correta e a banca examinadora deverá aceitar esta resposta: $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$.

QUESTÃO 2

Considere uma seqüência de triângulos retângulos cuja lei de formação é dada por

$$a_{k+1} = \frac{2}{3} a_k$$

$$b_{k+1} = \frac{4}{5} b_k$$

onde a_k e b_k, para $k \geq 1$, são os comprimentos dos catetos do k-ésimo triângulo retângulo. Se $a_1 = 30$ cm e $b_1 = 42$ cm, determine o valor da soma das áreas de todos os triângulos quando $k \to \infty$.

Resolução

Seja A_k a área do k-ésimo triângulo retângulo. Tal área é dada por: $A_k = \frac{a_k \cdot b_k}{2}$. Para encontrarmos a relação de recorrência na seqüência das áreas, fazemos:

$$A_{k+1} = \frac{a_{k+1} \cdot b_{k+1}}{2} = \frac{\frac{2}{3} a_k \cdot \frac{4}{5} b_k}{2} = \frac{8}{15} \cdot \frac{a_k \cdot b_k}{2} = \frac{8}{15} A_k$$

Assim, $\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{8}{15}$, para todo k inteiro positivo, ou seja, a razão entre dois termos consecutivos quaisquer é constante, o que caracteriza a seqüência $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ como uma progressão geométrica de razão $q = \frac{8}{15}$ e primeiro termo $A_1 = \frac{a_1 \cdot b_1}{2} = \frac{30 \cdot 42}{2} = 630 cm^2$. Sendo $|q| < 1$, podemos calcular o limite da soma dos k primeiros termos quando $k \to +\infty$.

$$S_\infty = \lim_{k \to +\infty} S_k = \frac{A_1}{1-q} = \frac{630}{1 - \frac{8}{15}} = \boxed{1350 cm^2}$$

QUESTÃO 3

Considere o sistema de equações dado por

$$\begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases}$$

onde α e β são números reais positivos. Determine o valor de P = $\alpha\beta$.

Resolução

$$\begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \frac{1}{2} \log_3 \beta = 10 \quad \text{(I)} \\ \frac{1}{2} \log_3 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

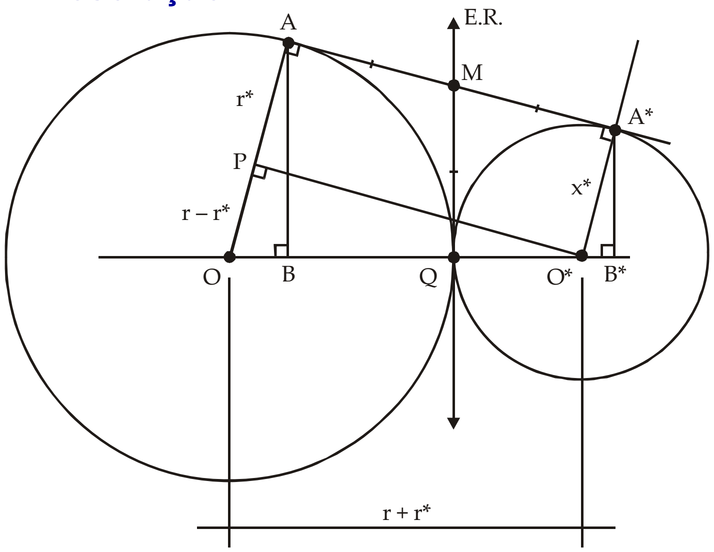
Subtraindo (II) de (I), temos:

$$\frac{5}{2} \log_3 \alpha + \frac{5}{2} \log_3 \beta = 0 \Rightarrow \log_3 \alpha + \log_3 \beta = 0 \Rightarrow \log_3 \alpha\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha\beta = 1}$$

QUESTÃO 4

Sejam C e C* dois círculos tangentes exteriores de raios r e r* e centros O e O*, respectivamente, e seja t uma reta tangente comum a C e C* nos pontos não coincidentes A e A*. Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento AA* em torno do eixo OO*, e seja S a sua correspondente área lateral. Determine S em função de r e r*.

Resolução



O ponto M pertence ao eixo radical (E.R.) e à tangente $\overleftrightarrow{AA^*}$, portanto MA = MA* = MQ.

Da figura, temos:

$$AA^{*2} = PO^{*2} = (r + r^*)^2 - (r - r^*)^2 = 4rr^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AA^* = 2\sqrt{rr^*} \Leftrightarrow MQ = \sqrt{rr^*}$$

Pelo teorema de Pappus-Guldin, temos S = $2\pi . R_m . AA^*$

Onde R_m= distância do ponto médio de AA^* até o eixo OO^*

Então R_m = MQ = $\sqrt{rr^*}$.

S = $2\pi . R_m . AA^* = 2 . \pi . \sqrt{rr^*} . 2\sqrt{rr^*}$.

$$\boxed{S = 4 . \pi . r . r^*}$$

QUESTÃO 5

Resolva a equação

$$\log_{(\operatorname{sen} x + \cos x)} (1 + \operatorname{sen} 2x) = 2, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Resolução

Nosso problema, no universo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, possui as seguintes condições de existência:

i) senx + cos x >0
ii) senx + cos x $\neq$ 1
iii) 1 + sen2x>0

Supondo que tais condições são válidas, podemos então reescrever nossa equação, utilizando para isso as propriedades dos logaritmos:

$$\log_{\operatorname{sen}x + \cos x} (1 + \operatorname{sen}2x) = 2 \Leftrightarrow (\operatorname{sen}x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen}2x$$

Expandindo o quadrado do lado esquerdo, temos:

$$(\operatorname{sen}x+\cos x)^2=\operatorname{sen}^2x+\cos^2x+2.\operatorname{sen}x.\cos x=1+\operatorname{sen}2x$$

E isso nos mostra que independentemente de qual é o valor de x (pertencente ao universo), a equação a equação $(\operatorname{sen}x+\cos x)^2=1+\operatorname{sen}2x$ sempre tem solução.

Analisando agora as condições de existência, temos:

i) $\operatorname{sen}x+\cos x>0\Rightarrow \operatorname{sen}x>-\cos x$

Portanto, no intervalo do universo, temos $x\in\left]-\frac{\pi}{4};0\right[$

ii) $\operatorname{sen}x+\cos x\neq 1\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, no intervalo do universo, temos:

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{4} \\ x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{3\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

iii) $\operatorname{sen}2x+1>0\Rightarrow \operatorname{sen}2x>-1$

Assim, no intervalo do universo, temos:

$2x\neq-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x\neq-\frac{\pi}{4}$

Dessa forma, os valores que satisfazem a equação são todos aqueles do universo, com exceção daqueles que desrespeitam as condições de existência (i), (ii) e (iii).

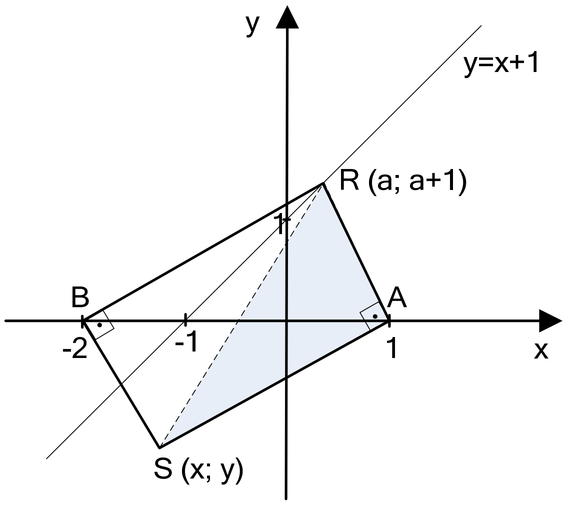
Assim temos $\boxed{S=\left]-\frac{\pi}{4},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}$

QUESTÃO 6

O quadrilátero BRAS, de coordenadas A(1,0), B(–2,0), R(x_1,y_1) e S(x_2,y_2) é construído tal que $R\hat{A}S=R\hat{B}S=90^\circ$. Sabendo que o ponto R pertence à reta t de equação y = x + 1, determine a equação algébrica do lugar geométrico descrito pelo ponto S ao se deslocar R sobre t.

Resolução

Como o ponto R pertence à reta y=x+1, temos que ele pode ser parametrizado como (a; a+1)



Através da ilustração, percebemos que as retas AR e AS, assim como as retas BS e BR, são perpendiculares, de modo que o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1. Lembrando que o coeficiente angular de uma reta é dado por $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, temos:

$$m_{AR}.m_{AS}=-1=m_{BS}.m_{BR}$$

$$\frac{(a+1)-0}{a-1}\cdot\frac{0-y}{1-x}=\frac{y-0}{x-(-2)}\cdot\frac{a+1-0}{a-(-2)}$$

$$\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{y}{x-1}=\frac{y}{x+2}\cdot\frac{a+1}{a+2}$$

Temos que a ordenada do ponto R, (a+1) ≠ 0 (de outra maneira, não poderíamos formar o quadrilátero)

Assim, podemos cancelar esse termo em ambos os membros. Por uma razão semelhante temos que y ≠ 0. Assim:

$$(a+2).(x+2)=(a-1).(x-1)$$

$$ax+2a+2x+4=ax-x-a+1\Rightarrow 3x=-3a-3$$

$$\Rightarrow x=-a-1\Rightarrow a=-x-1$$

Substituindo em $m_{AR}.m_{AS}=-1$, temos:

$$-1=\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{y}{x-1}=\frac{-x}{-x-2}\cdot\frac{y}{x-1}\Rightarrow xy=(x-1)(-x-2)\Rightarrow xy=-x^2-2x+x+2$$

Portanto, temos que o lugar geométrico é dado pela equação:

$$\boxed{x^2+x+x.y-2=0}$$

OBS.: Lembrando que a equação geral de uma cônica é dada por $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, e que o sinal de $\Delta=B^2-4.A.C$ define qual é a nossa cônica, temos:

$$\Delta=(1/2)^2-4.1.0\Rightarrow\Delta>0$$

Logo, o lugar geométrico do ponto S é uma **hipérbole**.

QUESTÃO 7

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2+(m-15)x+m=0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

Resolução

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, temos, de Girard:

$$\begin{cases} x_1+x_2=15-m \\ x_1x_2=m\end{cases}\Leftrightarrow x_1+x_2+x_1x_2=15$$

Assim, temos:

$x_1(x_2+1)+x_2+1=15+1 \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1)=16$

Portanto, (x_1+1) e (x_2+1) são fatores de 16, pois x_1 e x_2 são inteiros.

Como os divisores de 16 são ±1, ±2, ±4, ±8, ±16, supondo sem perda de generalidade que $x_1\le x_2$ e sabendo que m = $x_1.x_2$, temos a seguinte tabela que reúne todos os valores possíveis para m, a partir dos fatores (x_1+1) e (x_2+1):

x_1+1	x_2+1	x_1	x_2	m
1	16	0	15	0
2	8	1	7	7
4	4	3	3	9
– 16	– 1	– 17	– 2	34
– 8	– 2	– 9	– 3	27
– 4	– 4	– 5	– 5	25

Assim, $\boxed{m\in\{0, 7, 9, 25, 27, 34\}}$

QUESTÃO 8

Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as m + n bolas.

Observação: uma seqüência é dita simétrica quando possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

Resolução

Para garantir simetria, precisamos ter exatamente o mesmo número de bolas pretas à esquerda e à direita do centro, o mesmo sendo válido para as bolas brancas. Vamos dividir em dois casos:

i) m + n = par e ii) m + n = ímpar.

Em (i), como m + n é par, temos 2 possibilidades:

a) m e n ímpares: não podemos formar seqüência, pois o número de bolas à esquerda e à direita do centro não pode ser igual, logo, resposta **zero** para **m e n** ímpares;

b) m e n pares: como não temos termo central, temos $\frac{m}{2}$ bolas pretas e $\frac{n}{2}$ bolas brancas do mesmo lado; assim, podemos formar as seqüências permutando tais bolas; portanto, temos

$$\boxed{\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\text{ possibilidades, sendo m e n pares;}}$$

Em (ii), como m + n = ímpar, Temos que necessariamente, ou m ou n é ímpar e podemos construir a seguinte seqüência:

$$b_1\ \ b_2\ \dots\ b_{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)}\ \ \underbrace{b_{\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}}_{\text{bola central da sequencia}}\ \ b_{\left(\frac{m+n+3}{2}\right)}\ \dots\ b_{m+n}$$

Para que a seqüência seja simétrica, temos que $b_1 = b_{m+n}$;
$b_2 = b_{m+n-1}$;...; $b_{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)} = b_{\left(\frac{m+n+3}{2}\right)}$ e assim sucessivamente.

A bola central deve ser necessariamente aquela da cor cuja quantidade é ímpar. Assim, para formar as seqüências simétricas, basta escolhermos as bolas de 1 a $\frac{m+n-1}{2}$, que pode ser realizada de:

c) $\boxed{\frac{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\text{ maneiras, se m é ímpar e n é par.}}$

d) $\boxed{\frac{\left(\frac{m+n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}\text{ maneiras, se n é ímpar e m é par.}}$

QUESTÃO 9

Sejam a, b e c números reais não nulos. Sabendo que $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

Resolução

Do enunciado, podemos dizer que:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b+b+c+a+c}{c+a+b}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$$

para a + b + c ≠ 0, logo, $\boxed{\frac{a+b}{c}=2}$

Porém se a + b + c = 0, a + b = - c, dividindo ambos por c,

Obtemos $\boxed{\frac{a+b}{c}=-1}$

QUESTÃO 10

Seja f: $\aleph \to \Re$ uma função tal que $\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008\frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde $\aleph$ e $\Re$ são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\frac{1}{f(2006)}$.

Resolução

Expandindo o somatório para n = 2006:

$$\sum_{k=0}^{2006} f(k) = f(0)+f(1)+f(2)+\dots+f(2005)+f(2006)$$

$$\sum_{k=0}^{2006} f(k) = \underbrace{[f(0)+f(1)+\dots+f(2005)]}_{\sum_{k=0}^{2005} f(k)}+f(2006)$$

Assim, podemos reescrever nossa igualdade, isolando f(2006):

$$f(2006) = \sum_{k=0}^{2006} f(k) - \sum_{k=0}^{2005} f(k) =$$

$$= 2008\frac{(2006+1)}{(2006+2)} - 2008\frac{(2005+1)}{(2005+2)}$$

Então: $f(2006) = 2008\frac{2007}{2008} - 2008\frac{2006}{2007}$

$$f(2006) = 2007 - 2008\cdot\frac{2006}{2007} = \frac{2007^2 - 2008\cdot 2006}{2007} =$$

$$= \frac{2007^2 - (2007+1)\cdot(2007-1)}{2007} = \frac{2007^2 - \left(2007^2 - 1\right)}{2007} = \frac{1}{2007}$$

Portanto, $\boxed{\frac{1}{f(2006)} = 2007}$