01) Sejam a_1 = l - i, a_n = r + si e a_n+1 = (r – s) + (r + s)i (n > 1) termos de uma seqüência. Determine, em função de *n*, os valores de r e s que tornam esta seqüência uma progressão aritmética, sabendo que r e s são números reais e i = $\sqrt{-1}$

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1:

$a_1 = 1 - i$
$a_n = r + si$
$a_n + 1 = (r - s) + (r + s)\, i$
$a_n + 1 - a_n = K$ (razão)
$(r - s) + (r + s)\, i - r - si = - s + ri = K$
$\Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)\, K$
$r + si = 1 - i + (n - 1)(- s + ri)$
$r + si = 1 - ns + s + (-1 + nr - r)\, i$
parte real: $s = -1 + nr - r$
parte imaginária: $r = 1 - ns + s$, substituindo em s:
$s = -1 + n\,(1 - ns + s) - 1 + ns - s$
$s = -1 + n - n^2 s + ns - + ns - s$
$s = -2 + n - n^2 s + 2ns - s$
$2s = -2 + s\,(-n^2 + 2n) + n$
$s\,(n^2 - 2n + 2) = n - 2$

$$\boxed{s = \frac{n-2}{n^2 - 2n + 2}} \quad \text{e} \quad \boxed{r = \frac{n}{n^2 - 2n + 2}}$$

02) Considere o polinômio
p (x) = $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$.
Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a 3 - i e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2:

$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$
Raízes: k, r, s, t, w
$k \,.\, s = 3 - i$
$r \,.\, t = 3 + i$

$$k \,.\, r \,.\, s \,.\, t \,.\, w = \frac{-f}{a} \;\therefore\; (k \,.\, s)\,.\,(r \,.\, t)\,.\, w = \frac{-30}{1} \;\therefore$$

$(3 - i)(3 + i)\,.\, w = -30$
$(9 - i^2) + w = -30$
$\therefore 10 \,.\, w = -30 \therefore w = -3$

$$(a + bi)\,.\,(a - bi)\,.\,(c + di)\,.\,(c - di) = \frac{10}{1}$$

$(a^2 + b^2)\,.\,(c^2 + d^2) = 2 \,.\, 5$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ c^2 + d^2 = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ c^2 + d^2 = 2 \end{cases}$$

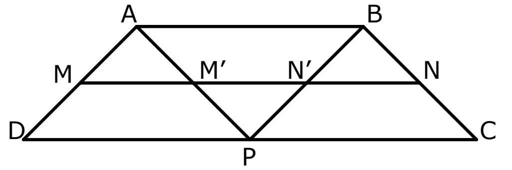
como $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}$ e $\underline{\underline{d}}$ são números inteiros não-nulos, teremos:
$a = \pm 1$; $b = \pm 1$
$c = \pm 2$; $d = \pm 1$
Raízes tais que $k \,.\, s = 3 - i$, $r \,.\, t = 3 + i$,

$$\begin{cases} k = 1 + i \\ s = 2 - i \end{cases} \text{ e } \begin{cases} r = 1 - i \\ t = 2 + i \end{cases}$$

Solução = { -3, 1 + i, 2 – i, 1 – i, 2 + i}

03) Um trapézio ABCD, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M' e N' dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem MM'N'N. Ao se traçar as retas AM' e BN', verificou-se que as mesmas se encontraram sobre o lado CD no ponto P. Calcule a área do trapézio M'N'CD em função da área de ABCD.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3:



$M'N' \rightarrow$ Base média do Δ ABC logo $MN' = \dfrac{AB}{2}$

Temos que: $MM' = M'N' = M'N' = N'M = \dfrac{AB}{2}$

$MM' \rightarrow$ Base média do Δ ADP.

Logo: $PC = 2NN' = 2 \,.\, \dfrac{AB}{2} = AB$

$DC = DP + PC = AB + AB = 2\, AB$

$S_{ABCD} = (AB + AC)\,.\, \dfrac{h}{2} = (AB + 2\, AB)\,.\, \dfrac{h}{2}$

$S_{M'N'CD} = \dfrac{(M'N' + DC)}{2} \bullet \dfrac{h}{2} = \left(\dfrac{AB}{2} + 2\, AB\right) . \dfrac{h}{2}$

$S_{M'N'CD} = \dfrac{5\, AB}{8}\, h$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{M'N'CD}} = \frac{3\,\frac{AB}{2} h}{\frac{5AB}{8} h} = \frac{3\, AB\, h}{2} \bullet \frac{8}{5AB\, h} = \frac{12}{5}$$

$$\boxed{S_{M'N'CD} = \frac{5}{12}\, S_{ABCD}}$$

04) Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Determine D_n em função de n ($n \in N$, $n \geq 1$).

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4:

Aplicando Laplace na primeira coluna temos

$$D_n = 2 \,.\, \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

ALFERES VESTIBULARES SISTEMA ELITE DE ENSINO ALFERES VESTIBULARES

$$-1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

e fazendo novamente Laplace na 1ª linha do segundo determinante temos

$D_n = 2\ .\ D_{n-1} - D_{n-2} \Leftrightarrow D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$.

Como esta última igualdade é válida para todo n isso caracteriza uma PA com $D_1 = 2$ e $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ e portanto de razão 1 o que nos dá $D_n = D_1 + (n-1)\ .\ R = 2 + (n-1)\ .\ 1 = n+1$.

Logo: $\boxed{D_n = n + 1}$

Uma solução alternativa seria usar indução:

$D_1 = [1] = 1$

$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$

$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 4$

Vamos provar a fórmula achada, por indução finita.

Supor verdadeira p/n = k, $D_k = k + 1$

Vamos provar que p/n = k + 1 é verdadeira

$D_{k+1} = (k + 1) + 1 = k + 2$

Aplicando laplace na 1º coluna da matriz temos:

$D_n = 2(-1)^{1+1}\ .\ D_{n-1} + (-1)\ .\ (-1)^{1+2}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando novamente laplace na 1ª linha

$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{1+1}\ .\ (-1)\ .\ D_{n-2}$

$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$

$D_{k+1} = 2\ D\ k - D_{k-1}$

$D_{k+1} = 2\ (k + 1) - k$

$D_{k+1} = 2k + 2 - k$

$D_{k+1} = k + 2$ É o que queríamos demonstrar.

Logo: $\boxed{D_n = n + 1}$

---

05) Determine os valores de x, y, z e r que satisfazem o sistema

$$C^{r}_{r+y} = \log_y x$$

$$\log_y z = 4 + \log_x z$$

$$C^{y}_{r+y} = \log_x z + \log_z z$$

onde C^p_m representa a combinação de m elementos tomados p a p e $\log_c B$ representa o logarítmo de B na base c.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5:

Fazendo a Condição de Existência, temos:

r ϵ N, y ϵ N, y > 0 e y ≠ 1, x > 0 e x ≠ 1

Usando $\log_y x = a$, $\log_x z = b$ e $C^r_{r+y} = C^y_{r+y} = t$, temos $\log_y z = \log_x z\ .\log_y x = ab$

Assim: $\begin{cases} t = a \\ ab = 4 + b \\ t = b + 1 \end{cases}$

Da equação 2: b(a-1) = 4

Das equações 1 e 3: a = b + 1 ⇒ a - 1 = b

⇒ b = ± 2

b = 2 ⇒ a = 3

b = -2 ⇒ a = -1

porém, t > 0 ⇒ a > 0 e a = -1 não é válido

logo, b = 2 e a = 3

$\Rightarrow C^y_{r+y} = 3 \Rightarrow \begin{cases} r + y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (r, y) = (2, 2)$

$\begin{cases} r + y = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow (r, y) = (1, 2)$

Porém pela Condição de Existência y = 1 não é válido, assim

(a, b, y, r) = (3, 2, 2, 1)

logo $x = y^a = 2^3 = 8$

$\log_8 z = 2$ então $z = 8^2 = 64$

Temos: $\boxed{(x, y, z, r) = (8, 2, 64, 1)}$

---

06) Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica (sen x + cos x) (sen^2 x - sen x cos x + cos^2 x) = 1

Determine os valores destes ângulos (em radianos).

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 6:

(sen x + cos x) (sen^2 x - sen x cos x + cos^2 x) = 1

sen^3 x + cos^3 x = 1

A solução dessa equação é da forma: $\frac{\pi}{2} + K\pi$

Como a solução desejada é ângulo de um triângulo temos que a solução é $x = \frac{\pi}{2}$.

Então a P. A. (a, b, $\frac{\pi}{2}$) e temos:

$$\frac{a + \frac{\pi}{2}}{2} = b \qquad (\mathrm{I})$$

$$a + b + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad (\mathrm{II})$$

De (I) em (II):

$$a + \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + = \pi$$

$\frac{3a}{2} = \pi - \frac{3\pi}{4}$, então $3a = \frac{\pi}{2}$, portanto $a = \frac{\pi}{6}$

Aplicando "a" em (I): $\frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}}{2} = b$

$b = \frac{\frac{\pi + 3\pi}{6}}{2} = \frac{4\pi}{12}$ então $b = \frac{\pi}{3}$

Então os ângulos são $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$.

ALFERES VESTIBULARES SISTEMA ELITE DE ENSINO ALFERES VESTIBULARES

07) Considere os pontos A(-1,0) e B(2,0) e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2, determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo $(0, \infty)$.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 7:

Seja, q coeficiente angular da reta r_2. Obrigando r_2 ser tangente à circunferência temos:

$$\begin{cases} y = q\,x - 2q \\ x^2 + (y-R)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y+2q}{q}$$

$$\left(\frac{y+2q}{q}\right)^2 + (y-R)^2 = R^2 \therefore \frac{y^2+4yq+4q^2}{q^2} + y^2 - 2yR + R^2 - R^2 = 0$$

$$\left(\frac{y+2q}{q}\right)^2 + (y-R)^2 = R^2 \therefore y^2 + 4yq + 4q^2 = 2yq^2R - y^2q^2$$

$y^2 + y^2q^2 + 4yq - 2\,yq^2R + 4q^2 = 0$

$(1 + q^2)\,.\,y^2 + (4q - 2q^2R)\,.\,y + 4q^2 = 0$

$\Delta = 0$

$(4q - 2q^2R)^2 - 4 + (1 + q^2)\,.\,4q^2 = 0$

$16q^2 - 16q^3R + 4q^4R^2 - 16q^2 - 16q^4 = 0$

$q^4\,(4r^2 - 16) - 16q^3R = 0 \qquad (/q^3)$

$q\,.\,(4R^2 - 16) - 16q^3R = 0$

$$q = \frac{16R}{4R^2-16} \therefore q = \frac{4R}{R^2-4}$$

Seja m o coeficiente angular da reta r_1. Obrigando r_1 ser tangente à circunferência, temos:

$$\begin{cases} y = mx + m \\ x^2 + (y-R)^2 = R^2 \end{cases} \qquad x = \frac{y-m}{m}$$

$$\left(\frac{y-m}{m}\right)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

$$\frac{y^2-2ym+m^2}{m^2} + y^2 - 2yR + R^2 = R^2$$

$$y^2 - 2ym + m^2 + m^2 + y^2 - 2ym^2R = 0$$

$(1 + m^2)y^2 - (2m + 2m^2R)\,.\,y + m^2 = 0$

$\Delta = 0$

$\Delta = [-(2m + 2m^2R)]^2 - 4\,.\,(1 + m^2)\,.\,m^2 = 0$

$4m^2 =+ 8m^3R\ |+ 4m^4R^2 - 4m^2 - 4m^4 = 0$

$(4R^2 - 4)\,m^4 + 8Rm^3 = 0 \qquad (/m^3)$

$(4R^2 - 4)\,.\,m + 8R = 0$

$$m = \frac{-8R}{4R^2-4} \therefore m = \frac{-2R}{R^2-1}$$

Como:

$y = q\,.\,(x - 2)$ e $y = m\,.\,(x + 1)$, temos:

$$y = \frac{4R}{R^2-4} \bullet (x-2) \qquad y = \frac{-2R}{R^2-1} \bullet (x+1)$$

Então:

$$\frac{4R^2}{R^2-4} \bullet (x-2) = \frac{-2R}{R^2-1} \bullet (x+1)$$

$$\frac{2x}{R^2-4} - \frac{4}{R^2-4} = \frac{-x}{R^2-1} - \frac{1}{R^2-1}$$

$$\frac{2x}{R^2-4} + \frac{x}{R^2-1} = \frac{4}{R^2-4} - \frac{-1}{R^2-1}$$

$$x \bullet \left(\frac{2R^2-2+R^2-4}{(R^2-4)\,(R^2-1)}\right) = \frac{4R^2-4-R^2+4}{(R^2-4)\,(R^2-1)}$$

$x\,.\,(3R^2 - 6) = 3R^2$

$$x = \frac{R^2}{R^2-2} \qquad \text{Eq. 1}$$

Cálculo de y

$$y = \frac{4R}{R^2-4} \bullet (x-2) \therefore y = \frac{4R}{R^2-4} \bullet \left(\frac{R^2}{R^2-2} - 2\right)$$

$$y = \frac{4R}{R^2-4} \bullet \left(\frac{R^2-2R^2+4}{R^2-2}\right) \therefore y = \frac{4R}{R^2-4} \bullet \left(\frac{-R^2+4}{R^2-2}\right)$$

$$y = \frac{-4R}{R^2-4} \bullet \left(\frac{R^2-4}{R^2-2}\right) \therefore y = \frac{-4R}{R^2-2} \qquad \text{Eq. 2}$$

Relacionando x com y temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{R^2}{R^2-2}}{\frac{-4R}{R^2-2}} \therefore \frac{x}{y} = \frac{R^2}{-4R} \therefore \frac{x}{y} = \frac{R}{-4}$$

$$R = \frac{-4x}{y}$$

Substituindo R na Eq. 2, temos:

$$y = \frac{-4 \bullet \left(-\frac{4x}{y}\right)}{\left(-\frac{4x}{y}\right)^2 - 2} \therefore y = \frac{\frac{16x}{y}}{\frac{16x^2}{y^2} - 2}$$

$$Y = \frac{\frac{16X}{Y}}{\frac{16X^2}{Y^2}} \therefore Y = 16X \bullet \frac{Y}{16X^2 - 2Y^2}$$

$$1 = \frac{16X}{16X^2 - 2Y^2} \therefore 16X^2 - 2Y^2 = 16X$$

$16X^2 - 16X - 2Y^2 = 0$

*Completando quadrado perfeito, temos:

$16x^2 - 16x + 4 - 4 - 2y^2 = 0$

$16\,.\,(x^2 - x + 1/4) - 2y^2 = 4 \qquad (/4)$

$4\,.\,(x^2 - x + 1/4) - \frac{y^2}{2} = 1$

$$4\,.\,(x - 1/2)^2 - \frac{y^2}{2} = 1$$

Que é uma equação de hipérbole, com centro em (1/2, 0) eixo transverso paralelo ao eixo das abscissas e distância focal igual a 3.

---

08) Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento ***a*** e uma esfera de raio ***R*** tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de a, calcule:

a) o volume total a esfera;

b) o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

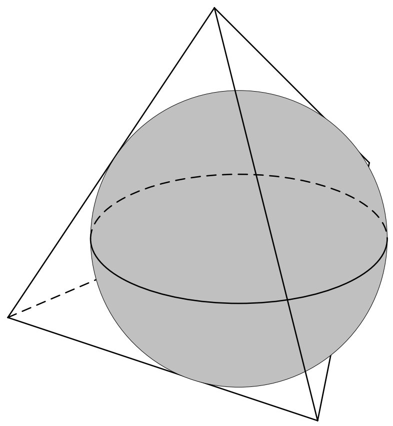
ALFERES VESTIBULARES SISTEMA ELITE DE ENSINO ALFERES VESTIBULARES

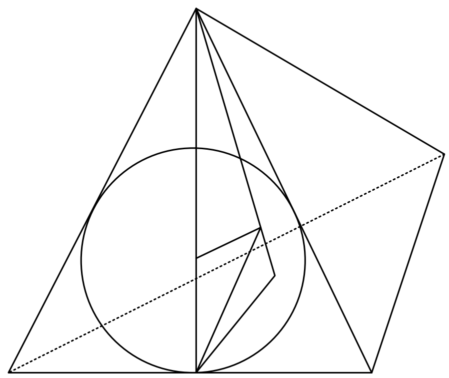
RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 8:

a) Seja V o volume todo da esfera

$\overline{DB} = R$

$\overline{DB} = r$

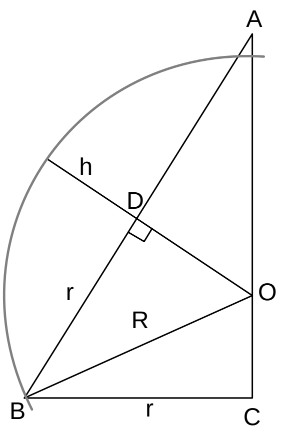




$$\overline{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{DB} = \frac{1}{3}\overline{AB} \Rightarrow \overline{DB} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\overline{DB} = \overline{CB} \Rightarrow \overline{CB} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$ABC \cong AOD \Rightarrow \frac{BC}{OD} = \frac{AB}{AO}$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\overline{OD}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{AC - OD} \Rightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\overline{OD}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{3} - \overline{OD}}$$

$$\overline{OD} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$\overline{OB}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DB}^2$$

$$\overline{OB}^2 = \frac{6a^2}{144} + \frac{3a^2}{36} \Rightarrow \overline{OB}^2 = \frac{18a^2}{144} \Rightarrow \overline{OB} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\,\overline{OB}^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{2\sqrt{2}a^3}{64}$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{\pi.\sqrt{2}.a^3}{24}}$$

b) Sejam V' o volume de uma calota e Vi o volume da esfera interno ao tetraedro

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{3a\sqrt{2} - a\sqrt{6}}{12}$$

$$h^2 = \frac{24a^2 - 12a^2\sqrt{3}}{144}$$

$$V' = \frac{1}{6}\pi a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{12}\right)\cdot\left(\frac{2-\sqrt{3}}{12} + \frac{3}{12}\right)$$

$$V' = \frac{1}{6}\pi a^3\left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{12}\right)\cdot\left(\frac{5-\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$V' = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{6}\left(\frac{18 - 8\sqrt{3}}{144}\right)$$

$$V' = \pi a^3\,\frac{(9 - 4\sqrt{3})\sqrt{2}}{432}$$

$$Vi = V - 4V'$$

$$Vi = \frac{a^3\sqrt{2}}{24} - 4\pi a^3\,\frac{(9-4\sqrt{3})\sqrt{2}}{108}$$

$$Vi = \frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12}\left[\frac{1}{2} - \frac{(9-4\sqrt{3})}{9}\right]$$

$$Vi = \frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12}\left(\frac{9}{8} - \frac{18 + 8\sqrt{3}}{18}\right)$$

$$Vi = \frac{a^3\sqrt{2}\pi}{12}\left(\frac{8\sqrt{3} - 9}{18}\right)$$

$$\boxed{Vi = a^3.\sqrt{2}.\pi\left(\frac{8\sqrt{3} - 9}{216}\right)}$$

---

09) Determine o conjunto solução S = {(x, y) | x $\wedge$ y $\in$ Z} da equação

(x + y) k = xy

Sabendo que k é um número primo.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 9:

x K + y K = x y

x y - x K - y K + K^2 = K^2

x(y - K) - K (y - K) = K^2

(y - K) (x - K) = K^2

ALFERES VESTIBULARES SISTEMA ELITE DE ENSINO ALFERES VESTIBULARES

Como K é primo:

1ª)

$$\begin{cases} y - K = -K^2 \\ x - K = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = K - K^2 \\ x = -1 + K \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y - K = K^2 \\ x - K = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = K^2 + K \\ x = K + 1 \end{matrix}$$

2ª)

$$\begin{cases} y - K = -1 \\ x - K = -K^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = K - 1 \\ x = K - K^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y - K = 1 \\ x - K = K^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = K + 1 \\ x = K^2 + K \end{matrix}$$

3ª)

$$\begin{matrix} \begin{cases} y - K = K \\ x - K = K \end{cases} \\ \begin{cases} y - K = -K \\ x - K = -K \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = 2K \\ x = 2K \end{matrix}$$

ASSIM, O CONJUNTO SOLUÇAO É: {(K-1,K-K^2); (K+1,K^2+K); (K-K^2,K-1); (K^2+K ;K+1); (2K,2K); (0,0)}

---

10) Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + ... + C_n^{3[n/3]}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + ... + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que [r] representa o maior inteiro menor ou igual ao número r.
Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1 + \text{cis}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)^n$.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 10:

As raízes cúbicas da unidade são vértices de um triângulo eqüilátero de centro na origem cujos vértices são representados pelos complexos 1,

$$\varepsilon = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3} \text{ e } \varepsilon^2 = \text{cis}\,\frac{4\pi}{3}.$$

Com isso,

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0, \text{ e}$$

$$(1+1)^n = C_n^0 1 + C_n^1 1^1 + C_n^2 1^2 + C_n^3 1^3 + C_n^4 1^4 + C_n^5 1^5 + C_n^6 1^6 + ...$$

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 1 + C_n^1 \varepsilon^1 + c_n^2 \varepsilon^2 + C_n^3 \varepsilon^3 + C_n^4 \varepsilon^4 + C_n^5 \varepsilon^5 + C_n^6 \varepsilon^6 + ...$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 1 + C_n^1 \varepsilon^2 + C_n^2 \varepsilon^4 + C_n^3 \varepsilon^6 + C_n^4 \varepsilon^8 + C_n^5 \varepsilon^{10} + C_n^6 \varepsilon^{12} + ...$$

logo

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n =$$

$$= 3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + ... + C_n^{3[n/3]}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = 3S_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^n + \left(\text{cis}\,\frac{\pi}{3}\right)^n + \left(\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n = 3S_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^n + 2\ \cos\frac{n\pi}{3} = 3S_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_0 = \frac{2^n + 2\ \cos\dfrac{n\pi}{3}}{3}.$$

b)

$$(1+1)^n = C_n^0 1 + C_n^1 1^1 + C_n^2 1^2 + C_n^3 1^3 + C_n^4 1^4 + C_n^5 1^5 + C_n^6 1^6 + ...$$

$$\varepsilon^2(1+\varepsilon)^n = C_n^0 \varepsilon^2 + C_n^1 \varepsilon^3 + C_n^2 \varepsilon^4 + C_n^3 \varepsilon^5\ C_n^4 \varepsilon^6 + C_n^5 \varepsilon^7 + C_n^6 \varepsilon^8 + ...$$

$$\varepsilon(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 \varepsilon + C_n^1 \varepsilon^3 + C_n^2 \varepsilon^5 + C_n^3 \varepsilon^7 + C_n^4 \varepsilon^9 + C_n^5 \varepsilon^{11} + C_n^6 \varepsilon^{13} + ...$$

logo

$$2^n + \varepsilon^2\ .\ \text{cis}\,\frac{n\pi}{3} + \varepsilon\ .\ \text{cis}\,\frac{(-n\pi)}{3} =$$

$$= 3(C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ... + C_n^{3[(n-1)/3]+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3S_1 = 2^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\text{cis}\,\frac{n\pi}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\text{cis}\,\frac{(-n\pi)}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3S_1 = 2^n - \text{cis}\,\frac{\pi}{3}\ .\ \text{cis}\,\frac{n\pi}{3} - \text{cis}\,\frac{(-\pi)}{3}\ .\ \text{cis}\,\frac{(-n\pi)}{3}$$

$$\Leftrightarrow S_1 = \frac{2^n - 2\ \cos\dfrac{(n+1)\pi}{3}}{3}.$$

VENHA SE PREPARAR PARA O ITA NESTA ARRANCADA FINAL NO ALFERES.

ALFERES VESTIBULARES SISTEMA ELITE DE ENSINO ALFERES VESTIBULARES

O CURSINHO COM O MAIOR ÍNDICE DE APROVAÇÃO. MARQUE UMA ENTREVISTA E VENHA NOS VISITAR.

PELO 3º ANO CONSECUTIVO O CURSINHO QUE MAIS APROVA NO IME E AFA NA GRANDE SÃO PAULO.

SISTEMA ELITE DE ENSINO APROVOU 85 ALUNOS NO IME 2005, A MAIOR APROVAÇÃO DO BRASIL.

SISTEMA ELITE DE ENSINO APROVOU 40 ALUNOS NO ITA 2005, A MAIOR APROVAÇÃO DO BRASIL.

ALFERES: A MAIOR APROVAÇÃO PERCENTUAL DE TODOS OS CURSINHOS NA FUVEST, ITA, IME E AFA 2003/2004.

MATRÍCULAS ABERTAS.

SISTEMA ELITE DE ENSINO ALFERES VESTIBULARES ALFERES VESTIBULARES

Este caderno foi elaborado para que os alunos conheçam os seus erros e saibam corrigi-los para melhorar os seus desempenhos nas futuras provas. Sucesso. É o desejo do Professor Feres e todos os professores e funcionários do ALFERES VESTIBULARES.

COMENTÁRIO A PROVA DE MATEMÁTICA:

A PROVA DE MATEMÁTICA DO IME FOI EXTREMAMENTE TRABALHOSA E EXIGENTE.
ESTE ANO, A PROVA DE MATEMÁTICA APRESENTOU 40% DE QUESTÕES FÁCEIS, 40% DE QUESTÕES DE NíVEL MÉDIO , 20% DE QUESTÕES DE NÍVEL ELEVADO E/OU TRABALHOSA.

CLASSIFICAMOS A SEGUIR AS QUESTÕES DA PROVA:

NÍVEL FÁCIL: 01 (P.A E COMPLEXOS), 03 (GEOMETRIA PLANA), , 05 (LOGARITMOS), 06 (TRIGONOMETRIA) e 09 (TEORIA DOS NÚMEROS INTEIROS).

NíVEL MÉDIO: 02 (POLINÔMIOS), 04 (DETERMINANTES) E 08 (GEOMETRIA ESPACIAL).

NÍVEL ELEVADO:, 07 (GEOMETRIA ANALÍTICA) E 10 (NÚMEROS COMPLEXOS E ANÁLISE COMBINATÓRIA).

ACREDITAMOS QUE O TEMPO DE 4 HORAS TENHA SIDO INSUFICIENTE PARA A RESOLUÇÃO DE TODAS AS QUESTÕES.

A PROVA ESTÁ BEM PLANEJADA E SERÁ CAPAZ DE QUALIFICAR OS ALUNOS MAIS PREPARADOS.
O NÍVEL DE DIFICULDADE SE MANTEVE EM RELAÇÃO A 2004.